Riemannin zeeta-funktio

LuK-tutkielma
Iina Leppänen
2577447
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2021

Sisältö

Johdanto

Leonhard Euler (1707 - 1783) ratkaisi vuonna 1735 matemaatikoita askarruttaneen *Baselin ongelman*, joka koski summan

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

suppenemista. Tämän jälkeen Euler jatkoi kyseistä muotoa olevien summien tutkimista muilla kokonaislukupotensseilla. Vuonna 1737 hän määritteli ensimmäisenä Riemannin zeeta-funktion muodossa

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

missä $s \in \mathbb{R}$ ja $\mathrm{Re}(s) > 1$, ja tulevina vuosina Euler löysi useita tuloksia edellä esitetylle funktiolle ja sen yleistyksille. Tulevaisuudessa erityisen tärkeiksi tuloksiksi osoittautuivat Riemannin zeeta-funktion yhteys alkulukuihin ja Eulerin määrittelemään gamma-funktioon $\Gamma(s)$.

Yli sata vuotta myöhemmin nimittäin, vuonna 1859, Bernhard Riemann (1826 - 1866) kiinnostui Eulerin määrittelemästä zeeta-funktiosta ja sen yhteydestä alkulukuihin pyrkiessään todistamaan Alkulukulausetta. Riemann onnistui laajentamaan funktion $\zeta(s)$ kompleksiavaruuteen kaikille $s \in \mathbb{C}$, joille $s \neq 1$, hyödyntäen kyseisen funktion yhteyttä gamma-funktioon. Riemann onnistui myös todistamaan Alkulukulauseen käyttäen kuutta hypoteesia, joista yksi on edelleen todistamatta. Tämä todistamaton hypoteesi tunnetaan nimellä *Riemannin hypoteesi* ja se on yksi suurimmista avoimista matemaattisista ongelmista. Riemannin hypoteesi voidaan muotoilla Riemannin zeeta-funktion avulla ja se väittää, että funktion $\zeta(s)$ kompleksiset (ei-triviaalit) nollakohdat sijaitsevat ns. kriittisellä suoralla, jolla $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

On siis selvää, että Riemannin zeeta-funktiolla on varsin läheinen, joskin vielä hieman avoin, suhde alkulukuihin ja niiden jakaumaan. Tämä LuK-tutkielma keskittyykin Eulerin löytämään, Eulerin identiteettinä tunnettuun, yhteyteen Riemannin zeeta-funktion ja alkulukujen välillä ja esittelee muutamia sen sovellutuksia. Ennen sitä muistellaan kuitenkin muutamia tuttuja perusmääritelmiä ja tuloksia, sekä varmistetaan, että Riemannin zeeta-funktio on yllä esitetyssä summamuodossaan varmasti hyvin määritelty kaikille reaalisille s, joille $s > 1$.

Tutkielman todistusten pohjana ja samalle sen päälähteenä on toiminut Michael T. Rassiaksen teos *Problem-Solving and selected Topics in Number Theory: In the Spirit of Mathematical Olympiads* [5]. Historialliset tiedot pohjautuvat osin myös Lokenath Debnathin teokseen *The Legacy of Leonhard Euler: A Tricentennial Tribute* [1]. Luvussa 1 esitettävät määritelmät ja tulokset on esitetty annetuilla kursseilla. Koska nämä tulokset esitellään enimmäkseen ilman todistuksia, lukijalla olisi hyvä olla perustietoja lukuteorian, algebran ja analyysin puolelta. Vietan lauseen 1.5, Lemman 2.9 ja Lemman 2.11 todistukset olen muotoillut itse perustietojen pohjalta.

1 Määritelmiä ja tuloksia

Tässä osiossa esitellään muutamia peruskäsitteitä ja -tuloksia, jotka ovat tärkeitä tulevien todistusten kannalta.

Alkuluvun määritelmä ja Aritmetiikan peruslauseen todistus on annettu kurssilla Algebran perusteet [3]. Binomikerroin ja Newtonin binomikaava on esitelty esimerkiksi kurssilla Todennäköisyyslaskenta [6]. Sarjoihin liittyvät tulokset perusteltiin mm. kurssilla Sarjat ja approksimointi [2] ja Integraalilaskennan väliarvolause on todistettu kurssilla Integraali [7]. Kompleksilukuihin liittyvät määritelmät ja tulokset on esitelty esimerkiksi kurssilla Kompleksianalyysi [4].

Määritelmä 1.1 (Alkuluku)**.** Luku $p \in \mathbb{Z}$ on *alkuluku*, mikäli $p \geq 2$ ja p on jaollinen ainoastaan luvuilla ± 1 ja $\pm p$.

Lause 1.2 (Aritmetiikan peruslause)**.** *Jokainen lukua yksi suurempi positiivinen kokonaisluku n voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa*

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k},$$

missä luvut $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ ovat alkulukuja ja luvut $a_1, a_2, \dots, a_k$ ovat positiivisia kokonaislukuja.

Määritelmä 1.3 (Binomikerroin)**.** Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Lukua

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

kutsutaan *binomikertoimeksi*.

Lause 1.4 (Newtonin binomikaava)**.** *Olkoot a ja $b \in \mathbb{C}$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Lause 1.5 (Vietan lause)**.** *Polynomin $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, missä $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $a_n \neq 0$, juurien $r_1, r_2, \dots, r_n$ summalle pätee*

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

ja tulolle pätee

$$r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Todistus. Polynomi P voidaan kirjoittaa nollakohtiensa $r_1, r_2, \ldots, r_n$ avulla muodossa $P(x) = a_n(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_n)$. Kertomalla sulkuja auki saadaan polynomille P

$$\begin{aligned}
P(x) &= a_n(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\ldots(x-r_n)\\
&= a_n(x^2 - r_1x - r_2x + r_1r_2)(x-r_3)\ldots(x-r_n)\\
&= a_n(x^2 - (r_1+r_2)x + r_1r_2)(x-r_3)\ldots(x-r_n)\\
&= a_n(x^3 - (r_1+r_2)x^2 + r_1r_2x - r_3x^2 + (r_1+r_2)r_3x - r_1r_2r_3)\cdot\ldots\\
&\quad \cdot(x-r_n)\\
&= a_n(x^3 - (r_1+r_2+r_3)x^2 + (r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)x - r_1r_2r_3)\ldots(x-r_n).
\end{aligned}$$

Huomataan, että kertomalla kaikki sulut auki saadaan polynomi P muotoon $P(x) = a_nx^n - a_n(r_1+r_2+\ldots+r_n)x^{n-1} + \ldots + a_n(-1)^n(r_1r_2\ldots r_n)$. Koska toisaalta $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, niin vertaamalla kertoimia saadaan $a_{n-1} = -a_n(r_1+r_2+\ldots+r_n)$ ja $a_0 = a_n(-1)^n(r_1r_2\ldots r_n)$. Näin ollen

$$(-1)^n\frac{a_0}{a_n} = (-1)^n\frac{a_n(-1)^n(r_1r_2\ldots r_n)}{a_n} = (-1)^{2n}(r_1r_2\ldots r_n) = r_1r_2\ldots r_n$$

ja

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{-a_n(r_1+r_2+\ldots+r_n)}{a_n} = r_1+r_2+\ldots+r_n.$$

□

Lause 1.6 (Geometrisen sarjan suppeneminen). *Olkoon $q \in \mathbb{R}$. Geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ suppenee jos ja vain jos $|q| < 1$. Tällöin sarjan summa on*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Lause 1.7. *Olkoon $|x| < 1$ Tällöin logaritmille on sarjakehitelmä*

$$\log(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k.$$

Lause 1.8 (Integraalilaskennan väliarvolause). *Jos funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin tällöin*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

eräälle $c \in [a,b]$.

Määritelmä 1.9 (Imaginaariyksikkö)**.** Lukua i kutsutaan *imaginääriyksiköksi.* Sille pätee $i^2 = -1$.

Määritelmä 1.10 (Kompleksiluku)**.** Luku z on *kompleksiluku*, jos se voidaan ilmaista muodossa $z = x + yi$, missä x ja $y \in \mathbb{R}$ ovat yksikäsitteiset ja luku i on imaginääriyksikkö.

Lause 1.11 (de Moivren kaava)**.** *Olkoon* $z \in \mathbb{C}$ *ja* $n \in \mathbb{N}$ *. Tällöin*

$$z^n = r^n(\cos(n\Theta) + i\sin(n\Theta)).$$

2 Riemannin zeeta-funktio

Määritellään tämän tutkielman tarpeita varten Riemannin zeeta-funktio summamuodossa reaaliluvuille.

Määritelmä 2.1 (Riemannin zeeta-funktio)**.** *Riemannin zeeta-funktio* $\zeta(s)$ on sarja

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

missä $s \in \mathbb{R}$ ja $s > 1$.

Huomautus 2.2. Riemannin zeeta-funktio voidaan määritellä samalla summamuodolla myös kaikille $s \in \mathbb{C}$, missä $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Osoitetaan ensiksi, että Riemannin zeeta-funktio on hyvin määritelty kaikilla $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$ eli toisin sanoen osoitetaan, että summa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ suppenee kaikilla s. Samalla osoitetaan, että summa on reaalinen. Tätä varten täytyy ensin todistaa seuraava aputulos.

Lemma 2.3. *Olkoon* $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ *jokin jatkuva, positiivinen ja vähenevä funktio. Tällöin pätee*

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq S \leq a_1 + \int_1^{\infty} f(x)\,dx,$$

missä $a_n = f(n)$ *ja* $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$*, kaikille* $n \in \mathbb{Z}_+$.

Todistus. Merkitään sarjan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ osasummaa $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ ja sarjan mahdollisesti ääretöntä summaa (eli osasumman raja-arvoa) $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Jaetaan väli $[1, n]$ yhden pituisiin osaväleihin $[1, 2[, [2, 3[, \ldots, [n-1, n]$. Koska funktio f on jatkuva, Integraalilaskennan väliarvolauseen (Lause 1.8) nojalla on olemassa sellainen $s_t \in [t, t+1]$, missä $t = 1, 2, \ldots, n-1$, että

$$f(s_t) = \frac{1}{(t+1) - t} \int_t^{t+1} f(x)\,dx = \frac{1}{1} \int_t^{t+1} f(x)\,dx = \int_t^{t+1} f(x)\,dx.$$

Edelleen koska funktio $f(x)$ on vähenevä kaikilla $x \in [1, \infty[$, niin $f(x_1) \geq f(x_2)$ kaikilla $x_1, x_2 \in [1, \infty[$, joille pätee $x_1 \leq x_2$. Täten kaikille osaväleille

$[t, t+1[$, missä $t = 1, 2, \ldots, n-1$, pätee

$$f(t+1) \leq f(s_t) = \int\limits_t^{t+1} f(x)\,dx \leq f(t),$$

sillä $t+1 \geq s_t \geq t$. Näin ollen saadaan

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(n) \leq \int\limits_1^2 f(x)\,dx + \int\limits_2^3 f(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{n-1}^n f(x)\,dx,$$

joten

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int\limits_1^n f(x)\,dx$$

kaikille $n \in \mathbb{Z}_+$, missä $n \geq 2$. Vastaavasti

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) \geq \int\limits_1^2 f(x)\,dx + \int\limits_2^3 f(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{n-1}^n f(x)\,dx,$$

joten

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int\limits_1^n f(x)\,dx$$

kaikille $n \in \mathbb{Z}_+$, missä $n \geq 2$.

Nyt osasumma $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$, joten

$$S_n - f(1) = f(2) + \ldots + f(n) \leq \int\limits_1^n f(x)\,dx$$

edellisen perusteella. Vastaavasti saadaan

$$S_{n-1} = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) \geq \int\limits_1^n f(x)\,dx,$$

joten

$$S_n - f(1) \leq \int\limits_1^n f(x)\,dx \leq S_{n-1}.$$

Koska edelliset epäyhtälöt ovat voimassa kaikille $n \in \mathbb{Z}_+$, missä $n \geq 2$, niin voidaan ottaa raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - f(1)) \leq \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx \leq \lim_{n\to\infty} S_{n-1}.$$

Luku $f(1)$ on riippumaton luvusta n, joten se ei vaikuta raja-arvoon, jolloin saadaan

$$\lim_{n\to\infty} S_n - f(1) \leq \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx \leq \lim_{n\to\infty} S_{n-1}.$$

Tämä voidaan edelleen merkitä

$$S - f(1) \leq \int_1^\infty f(x)\,dx \leq S.$$

Vähennetään sarjan raja-arvo S ja epäoleellinen integraali $\int_1^\infty f(x)\,dx$ puolittain epäyhtälöistä , jolloin saadaan

$$-\int_1^\infty f(x)\,dx - f(1) \leq -S \leq -\int_1^\infty f(x)\,dx.$$

Kertomalla epäyhtälöt puolittain luvulla -1 saadaan

$$\int_1^\infty f(x)\,dx + f(1) \geq S \geq \int_1^\infty f(x)\,dx$$

eli

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \leq S \leq a_1 + \int_1^\infty f(x)\,dx,$$

kun merkitään $f(n) = a_n$ (eli $f(1) = a_1$). □

Nyt voidaan todistaa seuraava lause.

Lause 2.4.

$$\frac{1}{s-1} = \int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx \leq \zeta(s) \leq 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = 1 + \frac{1}{s-1},$$

joten funktio $\zeta(s)$ on reaalinen kaikilla $s > 1$.

Todistus. Olkoon $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ funktio $f(x) = 1/x^s$, missä $s \in \mathbb{R}$ ja $s > 1$. Nyt funktio f on jatkuva, vähenevä ja positiivinen koko määrittelyjoukossaan, joten Lemman 2.3 nojalla

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx \le S \le a_1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx,$$

missä $a_1 = f(1) = \frac{1}{1^s} = 1$ ja $S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$. Näin ollen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx \le \zeta(s) \le 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx,$$

missä $s \in \mathbb{R}$ ja $s > 1$. Edelleen epäoleelliselle integraalille $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$ pätee

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{n\to\infty} \Big/_{1}^{n} \frac{1}{-s+1} x^{-s+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(1-s)n^{s-1}} - \frac{1^{-s+1}}{1-s} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1-s)n^{s-1}} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-s} \\
&= -\frac{1}{1-s} = \frac{1}{s-1},
\end{aligned}$$

kun $s > 1$, sillä tällöin raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1-s)n^{s-1}} = 0$.

Näin ollen

$$\frac{1}{s-1} \le \zeta(s) \le 1 + \frac{1}{s-1}.$$

Koska edelleen $(s-1)^{-1}$ on reaalinen kaikilla $s \in \mathbb{R}$ ja $s > 1$, niin funktio $\zeta(s)$ on reaalinen kaikilla $s \in \mathbb{R}$ ja $s > 1$.

□

2.1 Eulerin identiteetti

Todistetaan seuraavaksi Eulerin identiteettinä tunnettu tulos, joka liittää Riemannin zeeta-funktion alkulukuihin.

Alkuperäisessä Eulerin identiteetin todistuksessaan Euler kertoi Riemannin zeeta-funktiota ensin luvulla $1 - 2^{-s}$, jolloin summasta $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ vähentyivät pois luvulla 2 jaolliset termit, sitten luvulla $1 - 3^{-s}$, jolloin summasta poistuivat luvulla 3 jaolliset termit, sitten luvulla $1-5^{-s}$ ja niin edespäin. Jatkamalla induktiivisesti Euler huomasi, että jäljelle jäävä summa suppeni lukuun yksi, mistä Eulerin identiteetti seurasi. [1]

Eulerin identiteetti on, paitsi osoitus Riemannin zeeta-funktion ja alkulukujen välisestä yhteydestä, myös analyyttinen tapa ilmaista Aritmetiikan peruslause. [1] Seuraava todistus pohjaakin Aritmetiikan peruslauseeseen.

Lause 2.5 (Eulerin identiteetti)**.** *Zeeta-funktio voidaan määritellä tulona yli kaikkien alkulukujen p seuraavasti:*

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}},$$

missä $s \in \mathbb{R}$ ja $s > 1$.

Todistus. Osoitetaan ensin, että kaikille alkuluvuille p pätee

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots,$$

missä $s > 1$ ja $s \in \mathbb{R}$.

Huomataan, että $|p^{-s}| < 1$, sillä alkuluvun määritelmän mukaan $p \geq 2 > 1$ ja lisäksi $s > 1$, jolloin

$$\left|p^{-s}\right| = \frac{1}{p^s} < \frac{1}{1^s} = 1.$$

Täten geometrinen sarja $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(p^{-s}\right)^k$ suppenee ja sen summa on $\frac{1}{1-p^{-s}}$. Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-p^{-s}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(p^{-s}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p^s}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}} = \frac{1}{p^{0s}} + \frac{1}{p^{1s}} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots .\end{aligned}$$

Edellisen perusteella tulo $\prod\limits_p \frac{1}{1-p^{-s}}$ voidaan purkaa seuraavasti

$$\begin{aligned}\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} &= \left(\frac{1}{1-2^{-s}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-3^{-s}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-5^{-s}}\right) \cdot \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \dots\right) \\ &\quad \cdot \left(1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{5^{2s}} + \dots\right) \cdot \dots .\end{aligned}$$

Kertomalla sulut auki saadaan

$$\begin{aligned}\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = &\left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^{2s}}+\ldots+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{2^s3^s}+\frac{1}{2^{2s}3^s}+\ldots+\frac{1}{3^{2s}}+\frac{1}{2^s3^{2s}}\right.\\
&\left.+\frac{1}{2^{2s}3^{2s}}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{5^{2s}}\ldots\right)\\
&=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^{2s}}+\ldots+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{2^s3^s}+\frac{1}{2^{2s}3^s}+\ldots+\frac{1}{3^{2s}}+\frac{1}{2^s3^{2s}}\\
&+\frac{1}{2^{2s}3^{2s}}+\ldots+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{2^s5^s}+\frac{1}{2^{2s}5^s}+\ldots+\frac{1}{3^s5^s}+\frac{1}{2^s3^s5^s}\\
&+\frac{1}{2^{2s}3^s5^s}+\ldots+\frac{1}{3^{2s}5^s}+\frac{1}{2^s3^{2s}5^s}+\frac{1}{2^{2s}3^{2s}5^s}+\ldots+\frac{1}{5^{2s}}\\
&+\frac{1}{2^s5^{2s}}+\frac{1}{2^{2s}5^{2s}}+\ldots+\frac{1}{3^s5^{2s}}+\frac{1}{2^s3^s5^{2s}}+\frac{1}{2^{2s}3^s5^{2s}}+\ldots\\
&+\frac{1}{3^{2s}5^{2s}}+\frac{1}{2^s3^{2s}5^{2s}}+\frac{1}{2^{2s}3^{2s}5^{2s}}+\ldots.\end{aligned}$$

Muokataan potensseja, jolloin

$$\begin{aligned}\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = &1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{(2^2)^s}+\ldots+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{(2\cdot 3)^s}+\frac{1}{(2^2\cdot 3)^s}+\ldots+\frac{1}{(3^2)^s}\\
&+\frac{1}{(2\cdot 3^2)^s}+\frac{1}{(2^2\cdot 3^2)^s}+\ldots+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{(2\cdot 5)^s}+\frac{1}{(2^2\cdot 5)^s}+\ldots\\
&+\frac{1}{(3\cdot 5)^s}+\frac{1}{(2\cdot 3\cdot 5)^s}+\frac{1}{(2^2\cdot 3\cdot 5)^s}+\ldots+\frac{1}{(3^2\cdot 5)^s}\\
&+\frac{1}{(2\cdot 3^2\cdot 5)^s}+\frac{1}{(2^2\cdot 3^2\cdot 5)^s}+\ldots+\frac{1}{(5^2)^s}+\frac{1}{(2\cdot 5^2)^s}\\
&+\frac{1}{(2^2\cdot 5^2)^s}+\ldots+\frac{1}{(3\cdot 5^2)^s}+\frac{1}{(2\cdot 3\cdot 5^2)^s}+\frac{1}{(2^2\cdot 3\cdot 5^2)^s}+\ldots\\
&+\frac{1}{(3^2\cdot 5^2)^s}+\frac{1}{(2\cdot 3^2\cdot 5^2)^s}+\frac{1}{(2^2\cdot 3^2\cdot 5^2)^s}+\ldots.\end{aligned}$$

Voidaan huomata, että edellisessä summassa esiintyvät kaikkien alkulukujen kaikkien positiivisten kokonaislukupotenssien käänteisluvut sekä niiden yhdistelmät potenssiin s korotettuina. Koska Aritmetiikan peruslauseen 1.2 mukaan kaikki positiiviset kokonaisluvut voidaan ilmaista alkulukujen tulona, esiintyvät summassa kaikkien positiivisten kokonaislukujen n käänteisluvut potenssiin s korotettuina. Toisin sanoen

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \zeta(s).$$

$\square$

Seuraus 2.6. *Eulerin identiteetistä seuraa*

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \prod_p \frac{1}{1+p^{-s}}.$$

Todistus. Eulerin identiteetin 2.5 nojalla

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} &= \frac{\prod\limits_p \frac{1}{1-p^{-2s}}}{\prod\limits_p \frac{1}{1-p^{-s}}} = \left(\prod_p \frac{1}{1-p^{-2s}}\right)\left(\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{1-2^{-2s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-2s}} \cdot \ldots\right)\left(\frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-s}} \cdot \ldots\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{1-2^{-2s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-2s}} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{1-2^{-s}}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{1-3^{-s}}\right)^{-1} \cdot \ldots \\
&= \frac{1}{1-2^{-2s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-2s}} \cdot \ldots \cdot \left(1-2^{-s}\right) \cdot \left(1-3^{-s}\right) \cdot \ldots \\
&= \frac{1-2^{-s}}{1-2^{-2s}} \cdot \frac{1-3^{-s}}{1-3^{-2s}} \cdot \ldots = \prod_p \frac{1-p^{-s}}{1-p^{-2s}} = \prod_p \frac{1-p^{-s}}{1^2-(p^{-s})^2} \\
&= \prod_p \frac{1-p^{-s}}{(1-p^{-s})(1+p^{-s})} = \prod_p \frac{1}{1+p^{-s}}.
\end{aligned}$$

□

Huomautus 2.7. Seuraus 2.6 voidaan ilmaista myös muodossa

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s},$$

missä $\lambda(n) = (-1)^\rho$ ja $\rho = \sum\limits_{m=1}^{k} a_m$, kun luku n ilmaistuna alkulukutekijöidensä $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ avulla on $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$, missä luvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat positiivisia kokonaislukuja. [1]

Samoin Eulerin identiteetin avulla on mahdollista luoda yhteys Riemannin zeeta-funktion ja muiden lukuteoreettisten funktioiden, kuten Möbiusfunktion, välille. [5] Näitä ei kuitenkaan tarkastella tässä tutkielmassa.

2.2 Eulerin identiteetin sovelluksia alkuluvuille

Eulerin identiteetin 2.5 avulla on mahdollista todistaa mm. alkulukujen määrän äärettömyys ja niiden käänteislukujen summan äärettömyys.

Lause 2.8. *Alkulukuja on ääretön määrä.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että alkulukuja olisi äärellinen määrä. Tällöin alkuluvut p voitaisiin luetella $p_1, p_2, \dots, p_k$, missä $k \in \mathbb{Z}_+$, jolloin tulo

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_{l=1}^{k} \frac{1}{1-p_l^{-s}} = \frac{1}{1-p_1^{-s}} \cdot \frac{1}{1-p_2^{-s}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1-p_k^{-s}}$$

koostuisi äärellisestä määrästä reaalilukuja, joten se olisi reaaliluku kaikilla $s \in \mathbb{R}$ eli erityisesti $\prod\limits_p \frac{1}{1-p^{-1}}$ olisi reaaliluku. Nyt Eulerin identiteetin (Lause 2.5) nojalla tiedetään, että $\prod\limits_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, kun $s \in \mathbb{R}$ ja $s > 1$. Näin ollen, kun $s \to 1^+$,

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

vaikka $\lim\limits_{s\to 1^+} \prod\limits_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod\limits_p \frac{1}{1-p^{-1}} \in \mathbb{R}$. Tämä on ristiriita, joten vastaoletus on väärä eli alkulukuja on ääretön määrä.

□

Ennen alkulukujen käänteislukujen summan äärettömyyden todistamista on hyödyllistä todistaa logaritmille hieman luvussa 1 esitellystä sarjaesityksestä poikkeava summamuoto.

Lemma 2.9. *Logaritmi voidaan ilmaista sarjana*

$$\log(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x} \right)^n,$$

kun $x > \frac{1}{2}$.

Todistus. Olkoon $x > \frac{1}{2}$. Tällöin $0 < \frac{1}{x} < 2$ eli $-1 < \frac{1}{x} - 1 < 1$. Toisin sanoen $|\frac{1}{x} - 1| < 1$. Edelleen logaritmin laskusääntöjen perusteella

$$\log(x) = \log\left(\left(\frac{1}{x} \right)^{-1} \right) = -\log\left(\frac{1}{x} \right) = -\log\left(\frac{1}{x} - 1 + 1 \right)$$

Nyt, koska $\log(y+1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^n$, kun $|y| < 1$, niin saadaan

$$\begin{aligned} -\log\left(\frac{1}{x} - 1 + 1 \right) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-1 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x} \right) \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x} \right)^n. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\log(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x} \right)^n .$$

□

Nyt voimme todistaa alkulukujen käänteislukujen summan äärettömyyden.

Lause 2.10. *Alkulukujen p summa $\sum\limits_p \frac{1}{p}$ hajaantuu (suppenee äärettömään).*

Todistus. Kun $s \to 1^+$,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Täten, koska kuvaus $x \mapsto \log(x)$ on jatkuva kaikilla $x \in \mathbb{R}, x > 0$ ja $\log(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$, niin $\log(\zeta(s)) \to \infty$, kun $s \to 1^+$.

Nyt Eulerin identiteetin 2.5 nojalla

$$\log(\zeta(s)) = \log\left(\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \right) = \log\left(\frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-s}} \cdot \ldots \right),$$

missä p on alkuluku ja $s \in \mathbb{R},\ s > 1$. Edelleen logaritmille pätee $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a, b > 0$, joten

$$\log(\zeta(s)) = \log\left(\frac{1}{1-2^{-s}} \right) + \log\left(\frac{1}{1-3^{-s}} \right) + \ldots = \sum_p \log\left(\frac{1}{1-p^{-s}} \right).$$

Lemman 2.9 mukaan $\log(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x} \right)^n$, kun $x > \frac{1}{2}$. Koska $p^{-s} > 0$, niin $\frac{1}{1-p^{-s}} > \frac{1}{1} = 1 > \frac{1}{2}$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{1}{1-p^{-s}} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{1-p^{-s}} - 1 \right) \Big/ \left(\frac{1}{1-p^{-s}} \right) \right)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\left(\frac{p^s}{p^s-1} - \frac{p^s-1}{p^s-1} \right) \Big/ \left(\frac{p^s}{p^s-1} \right) \right)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\left(\frac{p^s-p^s+1}{p^s-1} \right) \left(\frac{p^s-1}{p^s} \right) \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{p^s} \right)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1^n}{(p^s)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} = \frac{1}{p^s} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}}.
\end{aligned}$$

Nyt, koska $\frac{1}{n} < 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $n \geq 2$, niin $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} < \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p^{ns}}$. Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned}\log(\zeta(s)) &= \sum_p \left(\frac{1}{p^s} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} \right) = \sum_p \frac{1}{p^s} + \sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} \\ &< \sum_p \frac{1}{p^s} + \sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p^{ns}}.\end{aligned}$$

Eulerin identiteetin 2.5 todistuksessa todettiin, että geometrinen summa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (p^{-s})^n$ suppenee kaikilla $s \in \mathbb{R}$ ja $s > 1$. Näin ollen saatiin

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(p^s)^n} = 1 + \frac{1}{p^s} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(p^s)^n},$$

joten

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(p^s)^n} &= \frac{1}{1-p^{-s}} - 1 - \frac{1}{p^s} = \frac{p^s}{p^s-1} - \frac{p^s-1}{p^s-1} - \frac{1}{p^s} \\ &= \frac{p^s}{(p^s-1)p^s} - \frac{p^s-1}{p^s(p^s-1)} = \frac{1}{p^s(p^s-1)}.\end{aligned}$$

Edelleen

$$\begin{aligned}\sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p^{ns}} &= \sum_p \frac{1}{p^s(p^s-1)} = \frac{1}{2^s(2^s-1)} + \frac{1}{3^s(3^s-1)} + \frac{1}{5^s(5^s-1)} + \dots \\ &< \frac{1}{2^s(2^s-1)} + \frac{1}{3^s(3^s-1)} + \frac{1}{4^s(4^s-1)} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s(n^s-1)},\end{aligned}$$

joten saadaan

$$\log(\zeta(s)) < \sum_p \frac{1}{p^s} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s(n^s-1)}.$$

Koska $\log(\zeta(s)) \to \infty$, kun $s \to 1^+$, niin summa $\sum\limits_p \frac{1}{p^s} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s(n^s-1)} \to \infty$, kun $s \to 1^+$. Kuitenkin summa $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s(n^s-1)}$ suppenee, kun $s \to 1^+$, joten summan $\sum\limits_p \frac{1}{p^s}$ täytyy hajaantua (supeta kohti ääretöntä), kun $s \to 1^+$.

$\square$

Alkulukujen määrän äärettömyys voidaan todistaa myös hiukan eri tavalla Eulerin identiteettiä 2.5 hyödyntäen. Tämän todistuksen muotoili L. A. Lyusternik (1899 - 1981) ja sitä varten tarvitaan Baselin ongelmana tunnettu tulos. [5]

Eulerin alkuperäinen Baselin ongelman todistus perustui funktion $\sin x/x$ käsittelyyn polynomina. Seuraava todistus on John Papadimitroun tekemä ja siinä käsitellään funktiota $\sin(nx)/(\sin(x))^n$ polynomina. [5]

Ennen Baselin ongelman todistusta tulee kuitenkin todistaa seuraava trigonometrinen epäyhtälö.

Lemma 2.11. *Kun* $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, *pätee* $\cot^2 x < \frac{1}{x^2} < \csc^2 x$.

Todistus. Tiedetään, että $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$, kun $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Jakamalla epäyhtälö puolittain luvulla $\frac{1}{2}$ ja korottamalla lausekkeet toiseen potenssiin saadaan

$$\sin^2 x < x^2 < \tan^2 x.$$

Näin ollen

$$\frac{1}{\sin^2 x} > \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\tan^2 x} = \left(\frac{1}{\tan x}\right)^2.$$

Edelleen $\csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ ja $(\tan x)^{-1} = \cot x$, joten saadaan

$$\csc^2 x > \frac{1}{x^2} > (\cot x)^2 = \cot^2 x.$$

□

Olen jakanut varsinaisen Baselin ongelman todistuksen seuraavan aputuloksen avulla pyrkien selkeyttämään todistusta. Todistetaan siis ensin, että funktio $\sin(nx)/(\sin(x))^n$ voidaan ilmaista polynomina.

Lemma 2.12. *Olkoon* $n \in \mathbb{Z}$ *pariton, eli* $n = 2m+1$, *missä* $m \in \mathbb{Z}$, *ja* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq l\pi$, *missä* $l \in \mathbb{Z}$. *Tällöin* $\frac{\sin(nx)}{(\sin x)^n}$ *voidaan kirjoittaa asteen* m *polynomina*

$$\frac{\sin(nx)}{(\sin x)^n} = P(t) = \binom{2m+1}{1}t^m - \binom{2m+1}{3}t^{m-1} + \ldots + \binom{2m+1}{2m+1}(-1)^m,$$

missä $t = \cot^2 x$.

Todistus. De Moivren kaavan (Lause 1.11) nojalla

$$\frac{\cos(nx) + i\sin(nx)}{(\sin(x))^n} = \frac{(\cos x + i\sin x)^n}{(\sin x)^n} = \left(\frac{\cos x + i\sin x}{\sin x}\right)^n.$$

Edelleen
$$\frac{\cos x + i\sin x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} + i\,\frac{\sin x}{\sin x} = \cot x + i,$$
joten saadaan
$$\frac{\cos(nx)}{(\sin x)^n} + i\frac{\sin(nx)}{(\sin(x))^n} = \frac{\cos(nx) + i\sin(nx)}{(\sin(x))^n} = (\cot x + i)^n.$$

Nyt Binomilauseen 1.4 nojalla
$$\begin{aligned}(\cot x + i)^n =& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cot^{n-k} x \cdot i^k \\ =& \binom{n}{0} \cot^n x + \binom{n}{1} \cot^{n-1} x \cdot i + \binom{n}{2} \cot^{n-2} x \cdot i^2 \\ &+ \binom{n}{3} \cot^{n-3} x \cdot i^3 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cot x \cdot i^{n-1} + \binom{n}{n} i^n.\end{aligned}$$
Sijoittamalla $n = 2m+1$ saadaan edellinen muotoon
$$\begin{aligned}(\cot x + i)^n =& \binom{2m+1}{0} \cot^{2m+1} x + \binom{2m+1}{1} \cot^{(2m+1)-1} x \cdot i \\ &+ \binom{2m+1}{2} \cot^{(2m+1)-2} x \cdot i^2 + \binom{2m+1}{3} \cot^{(2m+1)-3} x \cdot i^3 \\ &+ \ldots + \binom{2m+1}{(2m+1)-1} \cot x \cdot i^{(2m+1)-1} + \binom{2m+1}{2m+1} i^{2m+1} \\ =& \binom{2m+1}{0} \cot^{2m+1} x + \binom{2m+1}{1} \cot^{2m} x \cdot i \\ &+ \binom{2m+1}{2} \cot^{2m-1} x \cdot i^2 + \binom{2m+1}{3} \cot^{2m-2} x \cdot i^{2+1} \\ &+ \ldots + \binom{2m+1}{2m} \cot x \cdot i^{2m} + \binom{2m+1}{2m+1} i^{2m+1} \\ =& \binom{2m+1}{0} \cot^{2m+1} x + \binom{2m+1}{1} \cot^{2m} x \cdot i \\ &+ \binom{2m+1}{2} \cot^{2m-1} x \cdot i^2 + \binom{2m+1}{3} \cot^{2m-2} x \cdot i^2 \cdot i \\ &+ \ldots + \binom{2m+1}{2m} \cot x \cdot (i^2)^m + \binom{2m+1}{2m+1} (i^2)^m \cdot i.\end{aligned}$$

Koska imaginääriyksikölle pätee $i^2 = -1$, niin

$$\begin{aligned}
(\cot x + i)^n =& \binom{2m+1}{0} \cot^{2m+1} x + \binom{2m+1}{1} \cot^{2m} x \cdot i \\
& - \binom{2m+1}{2} \cot^{2m-1} x - \binom{2m+1}{3} \cot^{2m-2} x \cdot i \\
& + \ldots + \binom{2m+1}{2m} \cot x \cdot (-1)^m + \binom{2m+1}{2m+1} (-1)^m \cdot i \\
=& \left(\binom{2m+1}{0} \cot^{2m+1} x - \binom{2m+1}{2} \cot^{2m-1} x + \ldots \right. \\
& \left. + \binom{2m+1}{2m} \cot x \cdot (-1)^m \right) + i \cdot \left(\binom{2m+1}{1} \cot^{2m} x \right. \\
& \left. - \binom{2m+1}{3} \cot^{2m-2} x + \ldots + \binom{2m+1}{2m+1} (-1)^m \right).
\end{aligned}$$

Kaksi kompleksilukua $z = x + yi$ ja $t = u + vi$ ovat yhtäsuuret, mikäli pätee $x = u$ ja $y = v$. Aiemmin saatiin

$$\frac{\cos(nx)}{(\sin x)^n} + i \cdot \frac{\sin(nx)}{(\sin x)^n} = (\cot x + i)^n,$$

joten

$$\frac{\sin(nx)}{(\sin x)^n} = \binom{2m+1}{1} \cot^{2m} x - \binom{2m+1}{3} \cot^{2m-2} x + \ldots + \binom{2m+1}{2m+1} (-1)^m.$$

Edelleen

$$\begin{aligned}
\binom{2m+1}{1} \cot^{2m} x - \binom{2m+1}{3} \cot^{2m-2} x + \ldots + \binom{2m+1}{2m+1} (-1)^m \\
=& \binom{2m+1}{1} \cot^{2m} x - \binom{2m+1}{3} \cot^{2(m-1)} x + \ldots \\
& + \binom{2m+1}{2m+1} (-1)^m \\
=& \binom{2m+1}{1} (\cot^2 x)^m - \binom{2m+1}{3} (\cot^2 x)^{m-1} + \ldots \\
& + \binom{2m+1}{2m+1} (-1)^m,
\end{aligned}$$

sillä $\cot^a(x) = (\cot x)^a$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$. Näin ollen saadaan

$$\frac{\sin(nx)}{(\sin x)^n} = P(t) = \binom{2m+1}{1} t^m - \binom{2m+1}{3} t^{m-1} + \ldots + \binom{2m+1}{2m+1} (-1)^m,$$

missä $t = \cot^2 x$.

$\square$

Lause 2.13 (Baselin ongelma)**.** *Riemannin zeeta-funktiolla pätee*

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Todistus. Todistetaan Baselin ongelma rajoittamalla zeeta-funktiota pisteessä 2 molemmin puolin ja osoittamalla, että nämä rajat suppenevat lukuun $\frac{\pi^2}{6}$.

Olkoon $m \in \mathbb{Z}_+$ ja $x_r = \frac{r\pi}{2m+1}$, missä $r = 1, 2, \ldots, m$, jolloin

$$0 < \frac{\pi}{2m+1} \leq \frac{r\pi}{2m+1} \leq \frac{m\pi}{2m+1} < \frac{m\pi}{2m} = \frac{\pi}{2}$$

eli $x_r \in]0, \frac{\pi}{2}[$ kaikilla r.

Nyt Lemman 2.11 nojalla $\cot^2(x) < \frac{1}{x^2} < \csc^2(x)$, kun $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
&\cot^2 x_1 + \cot^2 x_2 + \ldots + \cot^2 x_m \\
&< \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_m^2} \\
&< \csc^2 x_1 + \csc^2 x_2 + \ldots + \csc^2 x_m.
\end{aligned}$$

Sijoittamalla $x_r = \frac{r\pi}{2m+1}$, missä $r = 1, 2, \ldots, m$, saadaan

$$\begin{aligned}
&\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \cot^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + \ldots + \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) \\
&\quad < \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{2\pi}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2 \\
&\quad < \csc^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \csc^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + \ldots + \csc^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right).
\end{aligned} \tag{1}$$

Edelleen keskimmäiselle lausekkeelle saadaan

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{2\pi}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2 \\
&\quad = \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} + \frac{(2m+1)^2}{2^2\pi^2} + \ldots + \frac{(2m+1)^2}{m^2\pi^2} \\
&\quad = \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \cdot \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{m^2}\right) = \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2},
\end{aligned}$$

joten kertomalla epäyhtälö (1) puolittain termillä $\pi^2/(2m+1)^2$

$$\begin{aligned}&\frac{\pi^2}{(2m+1)^2}\cdot\left(\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)+\cot^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right)+\ldots+\cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)\right)\\ &\qquad<\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}\\ &\qquad<\frac{\pi^2}{(2m+1)^2}\cdot\left(\csc^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)+\csc^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right)+\ldots\right.\\ &\qquad\quad\left.+\csc^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)\right).\end{aligned} \tag{2}$$

Kun $m\to\infty$, summan $\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}$ raja-arvona saadaan $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)$. Tutkitaan ensin epäyhtälön (2) vasemmanpuoleista lauseketta.

Merkitään $k=2m+1$, jolloin k on pariton positiivinen kokonaisluku. Tällöin Lemman 2.12 mukaan

$$\frac{\sin(kx)}{(\sin x)^k}=P(t)=\binom{2m+1}{1}t^m-\binom{2m+1}{3}t^{m-1}+\ldots+\binom{2m+1}{2m+1}(-1)^m,$$

missä $t=\cot^2 x$ ja $x\neq l\pi$, missä $l\in\mathbb{Z}$.

Nyt, koska $x_r\in]0,\frac{\pi}{2}[$ kaikilla r (eli toisin sanoen $x_r\neq l\pi$, missä $l\in\mathbb{Z}$, millään r), niin voidaan sijoittaa $x=x_r$ edelliseen yhtälöön, ja lisäksi $x_r=r\pi/(2m+1)$ ja $k=2m+1$, joten

$$kx_r=(2m+1)\cdot\frac{r\pi}{2m+1}=r\pi.$$

Näin ollen saadaan

$$\frac{\sin(kx_r)}{(\sin x_r)^k}=\frac{\sin(r\pi)}{(\sin x_r)^k}=\frac{0}{(\sin x_r)^k}=0,$$

kaikilla r, sillä $\sin y=0$ aina, kun $y=h\pi$, missä $h\in\mathbb{Z}$. Näin ollen $P(t)=0$, kun $t=\cot^2 x_r=\cot^2\left(\frac{r\pi}{2m+1}\right)$, missä $r=1,2,\ldots m$.

Koska kuvaus $y\mapsto\cot y$ on jatkuva välillä $y\in]0,\frac{\pi}{2}[$, niin luvut $\cot^2 x_r$, missä $r=1,2,\ldots m$, ovat erisuuret. Täten luvut $\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)$, $\cot^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right)$, $\ldots$, $\cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)$ ovat polynomin P m erisuurta nollakohtaa.

Nyt Vietan lauseen (Lause 1.5) mukaan polynomin P juurille pätee

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)+\cot^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right)+\ldots+\cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)=-\frac{-\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}}.$$

Edelleen

$$
\begin{aligned}
-\frac{-\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} &= \frac{(2m+1)!}{3!(2m+1-3)!} \Big/ \frac{(2m+1)!}{1!(2m+1-1)!} = \frac{2m!}{3!(2m-2)!} \\
&= \frac{2m(2m-1)(2m-2)!}{6(2m-2)!} = \frac{2m(2m-2)}{6}.
\end{aligned}
$$

Täten epäyhtälön (2) vasemman puoleinen lauseke saadaan muotoon

$$
\frac{\pi^2}{(2m+1)^2}\frac{2m(2m-2)}{6} = \frac{\pi^2}{6}\frac{4m^2-4m}{4m^2+4m+1}.
$$

Arvioidaan nyt epäyhtälön (2) oikeaa puolta. Koska

$$
\csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 + \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2} + 1 = \cot^2 x + 1,
$$

niin

$$
\begin{aligned}
\csc^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \csc^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + \ldots + \csc^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)& \\
= \cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + 1 + \cot^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + 1 + \ldots& \\
+ \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) + 1& \\
= \cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \cot^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + \ldots + \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)& \\
+ m.&
\end{aligned}
$$

Aiemmin saatiin

$$
\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \cot^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + \ldots + \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m-2)}{6},
$$

joten

$$
\csc^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \csc^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + \ldots + \csc^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m-2)}{6} + m.
$$

Edelleen

$$
\frac{2m(2m-2)}{6} + m = \frac{4m^2-4m}{6} + \frac{6m}{6} = \frac{4m^2-10m}{6},
$$

eli epäyhtälön (2) oikea puoli saadaan muotoon

$$\frac{\pi^2}{(2m+1)^2}\frac{4m^2-10m}{6} = \frac{\pi^2}{6}\frac{4m^2-10m}{4m^2+4m+1}.$$

Epäyhtälö 2 saatiin siis muotoon

$$\frac{\pi^2}{6}\frac{4m^2-4m}{4m^2+4m+1} < \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} < \frac{\pi^2}{6}\frac{4m^2-10m}{4m^2+4m+1}.$$

Edelleen vasemmanpuoleisen lausekkeen raja-arvoksi saadaan

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\pi^2}{6}\frac{4m^2-4m}{4m^2+4m+1} = \frac{\pi^2}{6}\lim_{m\to\infty}\frac{4-\frac{4}{m}}{4+\frac{4}{m}+\frac{1}{m^2}} = \frac{\pi^2}{6}\frac{4}{4} = \frac{\pi^2}{6},$$

ja vastaavasti oikeanpuoleisen lausekkeen raja-arvo on

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\pi^2}{6}\frac{4m^2-10m}{4m^2+4m+1} = \frac{\pi^2}{6}\lim_{m\to\infty}\frac{4-\frac{10}{m}}{4+\frac{4}{m}+\frac{1}{m^2}} = \frac{\pi^2}{6}\frac{4}{4} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Näin ollen, kun $m \to \infty$, epäyhtälö 2 suppenee muotoon

$$\frac{\pi^2}{6} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$$

eli $\frac{\pi^2}{6} \leq \zeta(2) \leq \frac{\pi^2}{6}$. Täten $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

□

Huomautus 2.14. Riemannin zeeta-funktion arvot kaikilla parillisilla positiivisilla kokonaisluvuilla s pystytään myös määräämään Bernoullin lukujen avulla ja nämä arvot ovat aina luvun π^s murtolukumonikertoja. [5]

Voimme nyt todistaa alkulukujen määrän äärettömyyden hyödyntäen piin irrationaalisuutta.

Lause 2.15. *Alkulukuja on ääretön määrä.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että alkulukuja on äärellinen määrä. Tällöin alkuluvut p voidaan numeroida $p_1, p_2, \ldots, p_k$, missä $k \in \mathbb{Z}_+$. Näin ollen tulo $\prod\limits_p \frac{1}{1-p^{-2}}$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}\prod_p \frac{1}{1-p^{-2}} =& \prod_{l=1}^{k}\frac{1}{p_l^{-2}(\frac{1}{p_l^{-2}}-1)} = \prod_{l=1}^{k}\frac{p_l^2}{p_l^2-1} = \frac{p_1^2}{p_1^2-1}\cdot\frac{p_2^2}{p_2^2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_k^2}{p_k^2-1}\\ =& \frac{(p_1p_2\ldots p_k)^2}{(p_1^2-1)(p_2^2-1)\ldots(p_k^2-1)}.\end{aligned}$$

Nyt, koska alkuluvut $p_1, p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{Z}_+$, niin luvut $(p_1 p_2 \ldots p_k)^2$ ja $(p_1^2 - 1)(p_2^2 - 1) \ldots (p_k^2 - 1)$ ovat myös kokonaislukuja ja näin ollen niiden osamäärä on rationaaliluku. Edelleen Eulerin identiteetin (Lause 2.5) ja Baselin ongelman (Lause 2.13) nojalla tiedetään, että

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

joten $\frac{(p_1 p_2 \ldots p_k)^2}{(p_1^2-1)(p_2^2-1)\ldots(p_k^2-1)} = \frac{\pi^2}{6}$. Luku $\frac{\pi^2}{6}$ ei kuitenkaan ole rationaaliluku, sillä π ei ole rationaaliluku. Näin ollen saadaan ristiriita, joten vastaoletus on väärä ja alkulukuja on täten ääretön määrä.

$\square$

Lähdeluettelo

[1] Debnath, L. (2010). *The Legacy of Leonhard Euler: A Tricentennial Tribute.* Imperial College Press.

[2] Filali, M. (2020) *Sarjat ja approksimointi.* Luentomuistiinpanot. Matemaattisten tieteiden tutkimusyksikkö. Oulun yliopisto.

[3] Niemenmaa, M., Myllylä, K. & Törmä, T. (2019). *Algebran perusteet.* Luentorunko. Matemaattisten tieteiden tutkimusyksikkö. Oulun yliopisto.

[4] Seikkala, S., Ruotsalainen, K., Ruotsalainen, P. & Kemppainen, J. (2016). *Kompleksianalyysi.* Luentorunko. Tekniikan matematiikka. Oulun yliopisto.

[5] Rassias, M. T. (2010). *Problem-Solving and Selected Topics in Number Theory: In the Spirit of the Mathematical Olympiads* (s.83 - 98). Springer.

[6] Ruha, L. (2019). *Todennäköisyyslaskenta.* Luentodiat. Matemaattisten tieteiden tutkimusyksikkö. Oulun yliopisto.

[7] Suomala, V. (2018). *Integraali.* Luentotiivistelmä. Matemaattisten tieteiden tutkimusyksikkö. Oulun yliopisto.